

Tables

List of Contents

3^n and 4^n

5^n and 6^n

7^n

11^n

13^n

n^n

Factorial n or $n!$

Derangements of n or $!n$

3ⁿ and 4ⁿ

Value of 3 ⁿ	n =	Value of 4 ⁿ	n =
3	1	4	1
9	2	16	2
27	3	64	3
81	4	256	4
243	5	1 024	5
729	6	4 096	6
2 187	7	16 384	7
6 561	8	65 536	8
19 683	9	262 144	9
59 049	10	1 048 576	10
177 147	11	4 194 304	11
531 441	12	16 777 216	12
1 594 323	13	67 108 864	13
4 782 969	14	268 435 456	14
14 348 907	15	1 073 741 824	15
43 046 721	16	4 294 967 296	16
129 140 163	17	17 179 869 184	17
387 420 489	18	68 719 476 736	18
1 162 261 467	19	274 877 906 944	19
3 486 784 401	20	1 099 511 627 776	20
10 460 353 203	21	4 398 046 511 104	21
31 381 059 609	22	17 592 186 044 416	22
94 143 178 827	23	70 368 744 177 664	23
282 429 536 481	24	281 474 976 710 656	24
847 288 609 443	25	1 125 899 906 842 624	25
2 541 865 828 329	26	4 503 599 627 370 496	26
7 625 597 484 987	27	18 014 398 509 481 984	27
22 876 792 454 961	28	72 057 594 037 927 936	28
68 630 377 364 883	29	288 230 376 151 711 744	29
205 891 132 094 649	30	1 152 921 504 606 846 976	30
617 673 396 283 947	31	4 611 686 018 427 387 904	31
1 853 020 188 851 841	32	18 446 744 073 709 551 616	32
5 559 060 566 555 523	33	73 786 976 294 838 206 464	33
16 677 181 699 666 569	34	295 147 905 179 352 825 856	34
50 031 545 098 999 707	35	1 180 591 620 717 411 303 424	35
150 094 635 296 999 121	36	4 722 366 482 869 645 213 696	36
450 283 905 890 997 363	37	18 889 465 931 478 580 854 784	37
1 350 851 717 672 992 089	38	75 557 863 725 914 323 419 136	38
4 052 555 153 018 976 267	39	302 231 454 903 657 293 676 544	39
12 157 665 459 056 928 801	40	1 208 925 819 614 629 174 706 176	40
36 472 996 377 170 786 403	41	4 835 703 278 458 516 698 824 704	41
109 418 989 131 512 359 209	42	19 342 813 113 834 066 795 298 816	42
328 256 967 394 537 077 627	43	77 371 252 455 336 267 181 195 264	43
984 770 902 183 611 232 881	44	309 485 009 821 345 068 724 781 056	44
2 954 312 706 550 833 698 643	45	1 237 940 039 285 380 274 899 124 224	45
8 862 938 119 652 501 095 929	46	4 951 760 157 141 521 099 596 496 896	46
26 588 814 358 957 503 287 787	47	19 807 040 628 566 084 398 385 987 584	47
79 766 443 076 872 509 863 361	48	79 228 162 514 264 337 593 543 950 336	48
239 299 329 230 617 529 590 083	49	316 912 650 057 057 350 374 175 801 344	49
717 897 987 691 852 588 770 249	50	1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376	50

5ⁿ and 6ⁿ

Value of 5 ⁿ	n =	Value of 6 ⁿ	n =
5	1	6	1
25	2	36	2
125	3	216	3
625	4	1 296	4
3 125	5	7 776	5
15 625	6	46 656	6
78 125	7	279 936	7
390 625	8	1 679 616	8
1 953 125	9	10 077 696	9
9 765 625	10	60 466 176	10
48 828 125	11	362 797 056	11
244 140 625	12	2 176 782 336	12
1 220 703 125	13	13 060 694 016	13
6 103 515 625	14	78 364 164 096	14
30 517 578 125	15	470 184 984 576	15
152 587 890 625	16	2 821 109 907 456	16
762 939 453 125	17	16 926 659 444 736	17
3 814 697 265 625	18	101 559 956 668 416	18
19 073 486 328 125	19	609 359 740 010 496	19
95 367 431 640 625	20	3 656 158 440 062 976	20
476 837 158 203 125	21	21 936 950 640 377 856	21
2 384 185 791 015 625	22	131 621 703 842 267 136	22
11 920 928 955 078 125	23	789 730 223 053 602 816	23
59 604 644 775 390 625	24	4 738 381 338 321 616 896	24
298 023 223 876 953 125	25	28 430 288 029 929 701 376	25
1 490 116 119 384 765 625	26	170 581 728 179 578 208 256	26
7 450 580 596 923 828 125	27	1 023 490 369 077 469 249 536	27
37 252 902 984 619 140 625	28	6 140 942 214 464 815 497 216	28
186 264 514 923 095 703 125	29	36 845 653 286 788 892 983 296	29
931 322 574 615 478 515 625	30	221 073 919 720 733 357 899 776	30
4 656 612 873 077 392 578 125	31	1 326 443 518 324 400 147 398 656	31
23 283 064 365 386 962 890 625	32	7 958 661 109 946 400 884 391 936	32
116 415 321 826 934 814 453 125	33	47 751 966 659 678 405 306 351 616	33
582 076 609 134 674 072 265 625	34	286 511 799 958 070 431 838 109 696	34
2 910 383 045 673 370 361 328 125	35	1 719 070 799 748 422 591 028 658 176	35
14 551 915 228 366 851 806 640 625	36	10 314 424 798 490 535 546 171 949 056	36
72 759 576 141 834 259 033 203 125	37	61 886 548 790 943 213 277 031 694 336	37
363 797 880 709 171 295 166 015 625	38	371 319 292 745 659 279 662 190 166 016	38
1 818 989 403 545 856 475 830 078 125	39	2 227 915 756 473 955 677 973 140 996 096	39
9 094 947 017 729 282 379 150 390 625	40	13 367 494 538 843 734 067 838 845 976 576	40
45 474 735 088 646 411 895 751 953 125	41	80 204 967 233 062 404 407 033 075 859 456	41
227 373 675 443 232 059 478 759 765 625	42	481 229 803 398 374 426 442 198 455 156 736	42
1 136 868 377 216 160 297 393 798 828 125	43	2 887 378 820 390 246 558 653 190 730 940 416	43
5 684 341 886 080 801 486 968 994 140 625	44	17 324 272 922 341 479 351 919 144 385 642 496	44
28 421 709 430 404 007 434 844 970 703 125	45	103 945 637 534 048 876 111 514 866 313 854 976	45
		623 673 825 204 293 256 669 089 197 883 129 856	46
		3 742 042 951 225 759 540 014 535 187 298 779 136	47
		22 452 257 707 354 557 240 087 211 123 792 674 816	48
		134 713 546 244 127 343 440 523 266 742 756 048 896	49
		808 281 277 464 764 060 643 139 600 456 536 293 376	50

Value of 7 ⁿ	n =
7	1
49	2
343	3
2 401	4
16 807	5
117 649	6
823 543	7
5 764 801	8
40 353 607	9
282 475 249	10
1 977 326 743	11
13 841 287 201	12
96 889 010 407	13
678 223 072 849	14
4 747 561 509 943	15
33 232 930 569 601	16
232 630 513 987 207	17
1 628 413 597 910 449	18
11 398 895 185 373 143	19
79 792 266 297 612 001	20
558 545 864 083 284 007	21
3 909 821 048 582 988 049	22
27 368 747 340 080 916 343	23
191 581 231 380 566 414 401	24
1 341 068 619 663 964 900 807	25
9 387 480 337 647 754 305 649	26
65 712 362 363 534 280 139 543	27
459 986 536 544 739 960 976 801	28
3 219 905 755 813 179 726 837 607	29
22 539 340 290 692 258 087 863 249	30
157 775 382 034 845 806 615 042 743	31
1 104 427 674 243 920 646 305 299 201	32
7 730 993 719 707 444 524 137 094 407	33
54 116 956 037 952 111 668 959 660 849	34
378 818 692 265 664 781 682 717 625 943	35
2 651 730 845 859 653 471 779 023 381 601	36
18 562 115 921 017 574 302 453 163 671 207	37
129 934 811 447 123 020 117 172 145 698 449	38
909 543 680 129 861 140 820 205 019 889 143	39
6 366 805 760 909 027 985 741 435 139 224 001	40
44 567 640 326 363 195 900 190 045 974 568 007	41
311 973 482 284 542 371 301 330 321 821 976 049	42
2 183 814 375 991 796 599 109 312 252 753 832 343	43
15 286 700 631 942 576 193 765 185 769 276 826 401	44
107 006 904 423 598 033 356 356 300 384 937 784 807	45
749 048 330 965 186 233 494 494 102 694 564 493 649	46
5 243 338 316 756 303 634 461 458 718 861 951 455 543	47
36 703 368 217 294 125 441 230 211 032 033 660 188 801	48
256 923 577 521 058 878 088 611 477 224 235 621 321 607	49
1 798 465 042 647 412 146 620 280 340 569 649 349 251 249	50

Value of 11 ⁿ	n =
11	1
121	2
1 331	3
14 641	4
161 051	5
1 771 561	6
19 487 171	7
214 358 881	8
2 357 947 691	9
25 937 424 601	10
285 311 670 611	11
3 138 428 376 721	12
34 522 712 143 931	13
379 749 833 583 241	14
4 177 248 169 415 651	15
45 949 729 863 572 161	16
505 447 028 499 293 771	17
5 559 917 313 492 231 481	18
61 159 090 448 414 546 291	19
672 749 994 932 560 009 201	20
7 400 249 944 258 160 101 211	21
81 402 749 386 839 761 113 321	22
895 430 243 255 237 372 246 531	23
9 849 732 675 807 611 094 711 841	24
108 347 059 433 883 722 041 830 251	25
1 191 817 653 772 720 942 460 132 761	26
13 109 994 191 499 930 367 061 460 371	27
144 209 936 106 499 234 037 676 064 081	28
1 586 309 297 171 491 574 414 436 704 891	29
17 449 402 268 886 407 318 558 803 753 801	30
191 943 424 957 750 480 504 146 841 291 811	31
2 111 377 674 535 255 285 545 615 254 209 921	32
23 225 154 419 887 808 141 001 767 796 309 131	33
255 476 698 618 765 889 551 019 445 759 400 441	34
2 810 243 684 806 424 785 061 213 903 353 404 851	35
30 912 680 532 870 672 635 673 352 936 887 453 361	36
340 039 485 861 577 398 992 406 882 305 761 986 971	37
3 740 434 344 477 351 388 916 475 705 363 381 856 681	38
41 144 777 789 250 865 278 081 232 758 997 200 423 491	39
452 592 555 681 759 518 058 893 560 348 969 204 658 401	40
4 978 518 112 499 354 698 647 829 163 838 661 251 242 411	41
54 763 699 237 492 901 685 126 120 802 225 273 763 666 521	42
602 400 691 612 421 918 536 387 328 824 478 011 400 331 731	43
6 626 407 607 736 641 103 900 260 617 069 258 125 403 649 041	44
72 890 483 685 103 052 142 902 866 787 761 839 379 440 139 451	45
801 795 320 536 133 573 571 931 534 665 380 233 173 841 533 961	46
8 819 748 525 897 469 309 291 246 881 319 182 564 912 256 873 571	47
97 017 233 784 872 162 402 203 715 694 511 008 214 034 825 609 281	48
1 067 189 571 633 593 786 424 240 872 639 621 090 354 383 081 702 091	49
11 739 085 287 969 531 650 666 649 599 035 831 993 898 213 898 723 001	50

Value of 13 ⁿ	n =
13	1
169	2
2 197	3
28 561	4
371 293	5
4 826 809	6
62 748 517	7
815 730 721	8
10 604 499 373	9
137 858 491 849	10
1 792 160 394 037	11
23 298 085 122 481	12
302 875 106 592 253	13
3 937 376 385 699 289	14
51 185 893 014 090 757	15
665 416 609 183 179 841	16
8 650 415 919 381 337 933	17
112 455 406 951 957 393 129	18
1 461 920 290 375 446 110 677	19
19 004 963 774 880 799 438 801	20
247 064 529 073 450 392 704 413	21
3 211 838 877 954 855 105 157 369	22
41 753 905 413 413 116 367 045 797	23
542 800 770 374 370 512 771 595 361	24
7 056 410 014 866 816 666 030 739 693	25
91 733 330 193 268 616 658 399 616 009	26
1 192 533 292 512 492 016 559 195 008 117	27
15 502 932 802 662 396 215 269 535 105 521	28
201 538 126 434 611 150 798 503 956 371 773	29
2 619 995 643 649 944 960 380 551 432 833 049	30
34 059 943 367 449 284 484 947 168 626 829 637	31
442 779 263 776 840 698 304 313 192 148 785 281	32
5 756 130 429 098 929 077 956 071 497 934 208 653	33
74 829 695 578 286 078 013 428 929 473 144 712 489	34
972 786 042 517 719 014 174 576 083 150 881 262 357	35
12 646 218 552 730 347 184 269 489 080 961 456 410 641	36
164 400 841 185 494 513 395 503 358 052 498 933 338 333	37
2 137 210 935 411 428 674 141 543 654 682 486 133 398 329	38
27 783 742 160 348 572 763 840 067 510 872 319 734 178 277	39
361 188 648 084 531 445 929 920 877 641 340 156 544 317 601	40
4 695 452 425 098 908 797 088 971 409 337 422 035 076 128 813	41
61 040 881 526 285 814 362 156 628 321 386 486 455 989 674 569	42
793 531 459 841 715 586 708 036 168 178 024 323 927 865 769 397	43
10 315 908 977 942 302 627 204 470 186 314 316 211 062 255 002 161	44
134 106 816 713 249 934 153 658 112 422 086 110 743 809 315 028 093	45
1 743 388 617 272 249 143 997 555 461 487 119 439 669 521 095 365 209	46
22 664 052 024 539 238 871 968 220 999 332 552 715 703 774 239 747 717	47
294 632 676 319 010 105 335 586 872 991 323 185 304 149 065 116 720 321	48
3 830 224 792 147 131 369 362 629 348 887 201 408 953 937 846 517 364 173	49
49 792 922 297 912 707 801 714 181 535 533 618 316 401 192 004 725 734 249	50

Factorials $n!$

Defined as

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

with the condition that $0! = 1$

Or recursively as

$$n! = (n-1)! \times n$$

So,

$$\begin{aligned} 1! &= 0! \times 1 = 1 \times 1 = 1 \\ 2! &= 1! \times 2 = 1 \times 2 = 2 \\ 3! &= 2! \times 3 = 2 \times 3 = 6 \\ 4! &= 3! \times 4 = 6 \times 4 = 24 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$n!$ gives the number of different ways in which n distinguishable objects may be ordered.

For example, given 3 objects - A, B, C they can be ordered in $3!$ (=6) different ways:

- ABC ACB
- BAC BCA
- CAB CBA

Value of $n!$	$n =$
1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5 040	7
40 320	8
362 880	9
3 628 800	10
39 916 800	11
479 001 600	12
6 227 020 800	13
87 178 291 200	14
1 307 674 368 000	15
20 922 789 888 000	16
355 687 428 096 000	17
6 402 373 705 728 000	18
121 645 100 408 832 000	19
2 432 902 008 176 640 000	20
51 090 942 171 709 440 000	21
1 124 000 727 777 607 680 000	22
25 852 016 738 884 976 640 000	23
620 448 401 733 239 439 360 000	24
15 511 210 043 330 985 984 000 000	25
403 291 461 126 605 635 584 000 000	26
10 888 869 450 418 352 160 768 000 000	27
304 888 344 611 713 860 501 504 000 000	28
8 841 761 993 739 701 954 543 616 000 000	29
265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000	30
8 222 838 654 177 922 817 725 562 880 000 000	31
263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000	32
8 683 317 618 811 886 495 518 194 401 280 000 000	33
295 232 799 039 604 140 847 618 609 643 520 000 000	34
10 333 147 966 386 144 929 666 651 337 523 200 000 000	35
371 993 326 789 901 217 467 999 448 150 835 200 000 000	36
13 763 753 091 226 345 046 315 979 581 580 902 400 000 000	37
523 022 617 466 601 111 760 007 224 100 074 291 200 000 000	38
20 397 882 081 197 443 358 640 281 739 902 897 356 800 000 000	39
815 915 283 247 897 734 345 611 269 596 115 894 272 000 000 000	40
33 452 526 613 163 807 108 170 062 053 440 751 665 152 000 000 000	41
1 405 006 117 752 879 898 543 142 606 244 511 569 936 384 000 000 000	42
60 415 263 063 373 835 637 355 132 068 513 997 507 264 512 000 000 000	43
2 658 271 574 788 448 768 043 625 811 014 615 890 319 638 528 000 000 000	44
119 622 220 865 480 194 561 963 161 495 657 715 064 383 733 760 000 000 000	45
5 502 622 159 812 088 949 850 305 428 800 254 892 961 651 752 960 000 000 000	46
258 623 241 511 168 180 642 964 355 153 611 979 969 197 632 389 120 000 000 000	47
12 413 915 592 536 072 670 862 289 047 373 375 038 521 486 354 677 760 000 000 000	48
608 281 864 034 267 560 872 252 163 321 295 376 887 552 831 379 210 240 000 000 000	49
30 414 093 201 713 378 043 612 608 166 064 768 844 377 641 568 960 512 000 000 000 000	50

Derangements

n

Derangements arise when considering all the possible ways in which a distribution can be done completely wrongly. For example, if there are 4 letters, each bearing a different address, and 4 envelopes (with addresses to match the letters) then there are 4! (=24) different ways of putting 1 letter into 1 envelope. But only 1 of those 24 ways would have the correct letter in every envelope. There are !4 (=9) ways of putting a wrong letter in EVERY envelope. The other 14 ways of distributing the letters among the envelopes would have some correct and some not.

The sequence of derangements is most easily developed by use of the recursive formula

$$!n = n (!n - 1) + (-1)^n \text{ starting with } !1 = 0$$

So,

$$!2 = 2(!1) + (-1)^2 = 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$!3 = 3(!2) + (-1)^3 = 3 \times 1 - 1 = 2$$

$$!4 = 4(!3) + (-1)^4 = 4 \times 2 + 1 = 9$$

$$!5 = 5(!4) + (-1)^5 = 5 \times 9 - 1 = 44$$

etc.

A direct formula is

$$!n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots - (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$$

So,

$$!5 = 120 \left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right]$$

$$!5 = 120 \left[1 - 1 + \frac{60}{120} - \frac{20}{120} + \frac{5}{120} - \frac{1}{120} \right]$$

$$= 44$$

In the limit as *n* tends to infinity then

$\frac{n!}{!n}$ tends to the value *e*

They are also known as **sub-factorials**

	Value of <i>n</i>										<i>n</i> =																					
											0	1																				
											1	2																				
											2	3																				
											9	4																				
											44	5																				
											265	6																				
										1	854	7																				
										14	833	8																				
										133	496	9																				
										1	334	961	10																			
										14	684	570	11																			
										176	214	841	12																			
										2	290	792	932	13																		
										32	071	101	049	14																		
										481	066	515	734	15																		
										7	697	064	251	745	16																	
										130	850	092	279	664	17																	
										2	355	301	661	033	953	18																
										44	750	731	559	645	106	19																
										895	014	631	192	902	121	20																
										18	795	307	255	050	944	540	21															
										413	496	759	611	120	779	881	22															
										9	510	425	471	055	777	937	262	23														
										228	250	211	305	338	670	494	289	24														
										5	706	255	282	633	466	762	357	224	25													
										148	362	637	348	470	135	821	287	825	26													
										4	005	791	208	408	693	667	174	771	274	27												
										112	162	153	835	443	422	680	893	595	673	28												
										3	252	702	461	227	859	257	745	914	274	516	29											
										97	581	073	836	835	777	732	377	428	235	481	30											
										3	025	013	288	941	909	109	703	700	275	299	910	31										
										96	800	425	246	141	091	510	518	408	809	597	121	32										
										3	194	414	033	122	656	019	847	107	490	716	704	992	33									
										108	610	077	126	170	304	674	801	654	684	367	969	729	34									
										3	801	352	699	415	960	663	618	057	913	952	878	940	514	35								
										136	848	697	178	974	583	890	250	084	902	303	641	858	505	36								
										5	063	401	795	622	059	603	939	253	141	385	234	748	764	684	37							
										192	409	268	233	638	264	949	691	619	372	638	920	453	057	993	38							
										7	503	961	461	111	892	333	037	973	155	532	917	897	669	261	726	39						
										300	158	458	444	475	693	321	518	926	221	316	715	906	770	469	041	40						
										12	306	496	796	223	503	426	182	275	975	073	985	352	177	589	230	680	41					
										516	872	865	441	387	143	899	655	590	953	107	384	791	458	747	688	561	42					
										22	225	533	213	979	647	187	685	190	410	983	617	546	032	726	150	608	122	43				
										977	923	461	415	104	476	258	148	378	083	279	172	025	439	950	626	757	369	44				
										44	006	555	763	679	701	431	616	677	013	747	562	741	144	797	778	204	081	604	45			
										2	024	301	565	129	266	265	854	367	142	632	387	886	092	660	697	797	387	753	785	46		
										95	142	173	561	075	514	495	155	255	703	722	230	646	355	052	796	477	224	427	894	47		
										4	566	824	330	931	624	695	767	452	273	778	667	071	025	042	534	230	906	772	538	913	48	
										223	774	392	215	649	610	092	605	161	415	154	686	480	227	084	177	314	431	854	406	736	49	
										11	188	719	610	782	480	504	630	258	070	757	734	324	011	354	208	865	721	592	720	336	801	50